Analytische Geometrie des Kreises

Nicht vektoriell

§ 1 Kreisgleichungen

Klasse 10 / 11

Stand 4. Juni 2009

Friedrich Buckel

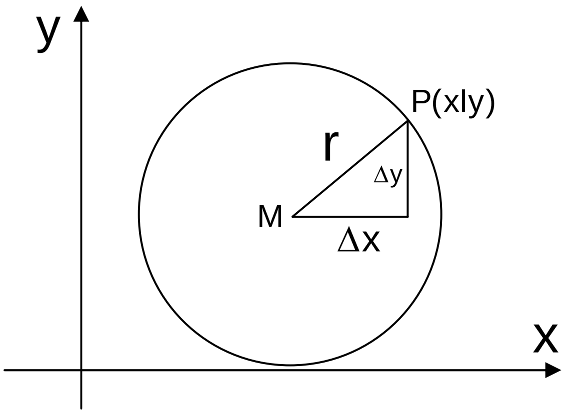
INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt:

§ 1 Kreisgleichungen

1.1 Definition und erste Beispiele



Ein Kreis ist definiert als Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt, genannt Mittelpunkt, einen festen Abstand r haben.

Es sei $M(x_M|y_M)$ gegeben.

Ein Punkt $P(x|y)$ liegt genau dann auf dem Kreis, wenn die Pythagoras-Gleichung gilt:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = r^2$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe der Koordinaten der beiden Punkte so schreiben:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \qquad (1)$$

Beispiele:

(1) Der Kreis um M(4I-1) mit Radius 5: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$

(2) Welchen Mittelpunkt und welchen Radius hat dieser Kreis: $x^2 + (y+7)^2 = 50$

Ergebnis: M(0I–7) und $r = \sqrt{50}$.

(3) Welche Gleichung hat der Kreis um M(-5I2) durch A(3I12)?

Berechnung von r^2 : $r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (3+5)^2 + (12-2)^2 = 164$

Gleichung: $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 164$

(4) $x^2 + y^2 = 64$ ist die Gleichung eines Kreises um der Ursprung mit r = 8.

(5) Eine Gleichung wie in Beispiel a) kann man durch Anwenden der binomischen Formeln umformen: $x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = 25$

bzw. $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8$

In dieser Form sind Mittelpunkt und Radius nicht mehr zu erkennen. Sollen diese „rekonstruiert“ werden, muss das Verfahren der **quadratischen Ergänzung** angewandt werden (siehe nächste Seite).

(6) Liegt der Punkt P(7 I 8) auf dem Kreis aus Beispiel a)?

Die beste Nachweismethode ist die Berechnung des Abstandes PM:

$$\overline{PM} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(7-4)^2 + (8+1)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} \neq 5$$

Weil die Entfernung des Punktes P von M größer als r ist, liegt P außerhalb des Kreises.

1.2 Berechnung von Mittelpunkt und Radius mittels Quadratischer Ergänzung.

(7) Gegeben ist ein Kreis durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8 \quad (1)$$

Wir sehen uns das Ziel unserer Rechnung an: $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$

Um dahin zu kommen, müssen wir zuerst (1) umordnen:

$$\left(x^2 - 8x\right) + \left(y^2 + 2y\right) = 8$$

Beiden Klammern sollen zu vollständigen Quadraten werden:

$(x^2 - 8x)$ soll zu $(x - 4)^2$ werden

Dazu fehlt in der Klammer noch das Quadrat der Zahl -4.

Und $(y^2 + 2y)$ soll zu $(y + 1)^2$ werden.

Dazu fehlt in der Klammer noch das Quadrat der Zahl +1.

Normalerweise kennt man jedoch das Ergebnis nicht, so dass man nur weiß, dass in jeder Klammer noch ein Quadrat fehlt:

$$\left(x^2 - 8x + \square\right) + \left(y^2 + 2y + \square\right) = 8$$

In der 1. Klammer ist $-8x$ als doppeltes Produkt vorhanden, also entnehmen wir daraus durch Halbieren die Zahl –4 und ergänzen in der Klammer deren Quadrat:, also 16

In der 2. Klammer ist $2y$ als doppeltes Produkt vorhanden, also entnehmen wir daraus durch Halbieren die Zahl 1 und ergänzen In der Klammer deren Quadrat:, also 1

$$\left(x^2 - 8x + \boxed{16}\right) + \left(y^2 + 2y + \boxed{1}\right) = 8 + \boxed{16} + \boxed{1} \quad (2)$$

Für eine Gleichung gilt der Grundsatz: Was auf einer Seite verändert wird, muss auch auf der anderen Seite passieren (damit die Seiten gleich groß bleiben). Also mussten auch auf der rechten Seite die beiden Quadrate 16 und 1 ergänzt werden. Dies ist in Gleichung (2) geschehen.

Letzter Schritt: Man schreibt beide Klammern als Quadrate und erhält

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Dann lassen sich Mittelpunkt und Radius ablesen:

M (+4 I –1) und aus $r^2 = 25$ folgt $r = 5$

Rest auf CD